Теорема 1. *На нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset V_n^*$ в расслоениях нормалей первого и второго родов индуцируются соответственно нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$, определяемые системами форм (4), (5) и являющиеся двойственными [4] по отношению друг к другу. Связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ могут быть полуплоскими [5] лишь одновременно.*

Теорема 2. *На регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset V_n^*$, оснащенной в смысле А.П. Нордена, двойственные нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормальная связность $\nabla^{\perp}$ ($\overline{\nabla}^{\perp}$) полуплоская.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. – ВИНИТИ АН СССР, 1979. – Т. 9. – 246 с.

2. Лаптев Г. Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

3. Норден А. П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

4. Столяров А. В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Изд-во Чуваш. пед. ин-та, 1994. – 290 с.

5. Чакмазян А. В. *Нормальная связность в геометрии подмногообразий.* – Ереван: Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116 с.

А. О. Малакичев

Иркутский государственный университет, *malakichev-artem@mail.ru*

ФРАКТАЛЬНЫЕ ГРАФЫ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕТКИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Для изучения свойств некоторых двумерных геометрических объектов целесообразно располагать их на координатной плоскости. Не являются исключением и комбинаторные объекты, в частности, данный метод применим и для изучения свойств одной из самых известных арифметических таблиц — треугольника Паскаля и объектов, построенных на его основе.

На основе представления треугольника Паскаля в виде прямоугольной таблицы, которое предложил еще Николло Тарталья, в [1] было предложено расположение треугольника, при котором устанавливается взаимно однозначное соответствие его точек с точками целочисленной решетки первой четверти. При таком соответствии биномиальные коэффициенты можно переписать следующим образом:

$$\binom{n}{k} = \frac{(x+y)!}{x!y!}, \tag{1}$$

где $n = x + y, k = y$.

Как известно (см., например, [2]) геометрический фрактал, так называемая "салфетка Серпинского", может быть получен из треугольника Паскаля удалением из него всех четных чисел или построенным по модулю два. Нетрудно показать, что элементы построенного таким образом треугольника совпадают с вершинами фрактального графа, соответствующего "салфетке Серпинского", алгоритм построения которого предложен в [3]. При размещении такого треугольника в решетке ее точки будут также соответствовать вершинам рассмотренного графа. Очевидно, что не все точки решетки будут принадлежать построенному объекту.

Другим подходом к представлению фрактала может быть представление его как целочисленной прямоугольной решетки с запрещенными позициями. Запрет будем накладывать на точки треугольника или графа, соответствующие биномиальные коэффициенты которых четные.

Примечателен тот факт, что все точки находящиеся в треугольнике в строках с номерами $0, 1, 3, 7, \ldots, 2^t - 1, t \in N$, остаются в такой решетке, т. е. биномиальные коэффициенты, находящиеся в данных строчках, являются нечетными числами.

В [2] рассмотрен вопрос о количестве биномиальных коэффициентов в строке с номером n, которые не делятся на простое число p, т. е. не являются запрещенными точками построенной решетки. Пусть $g(n,p)$ — число таких коэффициентов и $n = (a_l a_{l-1} \ldots a_1 a_0)_p$ — запись числа n в системе счисления с основанием p. Тогда справедлива следующая

Теорема 1[2]. $g(n,p) = (a_l + 1)(a_{l-1} + 1) \ldots (a_1 + 1)(a_0 + 1)$.

Рассмотрим частный случай для $n = 2^t - 1$ и $p = 2$. Методом математической индукции установлено, что $2^t - 1 = (\underbrace{1 \ldots 1}_{t})_2$. Подставив значения a_{l-i}, где $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$, в условия теоремы 1, получим, что $g(2^t - 1, 2) = 2^t$, т. е. равно числу биномиальных коэффициентов строки с номером $n = 2^t - 1$. Это означает, что $\binom{2^t - 1}{k} = 0 \ (mod\ 2)$. Зная, что для каждой точки решетки справедливо равенство (1), получим, что справедлива

Теорема 2. *Если* $x, y, t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют равенству* $x + y = 2^t - 1$, *то* $\binom{x+y}{y} = 1 \ (mod\, 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green T. M. *Recurrent sequences and Pascal's triangle* // Math. Mag. – 1968. – V. 41. – No 1. – P. 13–21.

2. Бондаренко Б. А. *Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы и приложения.* – Ташкент.: ФАН, 1990. – 192 с.

3. Кузьмин О. В. *О некоторых алгоритмах построения фрактальных графов* // Дискретный анализ и информатика. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2010. – Вып. 4. Комбинаторные и вероятностные проблемы дискретной математики. – С. 64–70.